

Recherche Opérationnelle
R.O.
Partie 2: Programmation Linéaire P.L

Pr. Abdessamad Kamouss

Cycle Ingénieur
ENSAM Casablanca



Programmation linéaire - Définitions

Définition

La programmation linéaire est une branche des mathématiques appliquées, plus précisément de l'optimisation dont l'objectif est de minimiser ou maximiser une fonction numérique multilinéaire (dite **fonction objectif** ou **fonction économique**) à plusieurs variables, sachant que ces dernières sont liées moyennant **des équations ou des inéquations linéaires** dites **contraintes**.

De nombreux problèmes concrets provenant de domaines aussi divers que l'industrie lourde, le raffinage, les transports, l'agriculture, la gestion...peuvent être modélisés comme des programmes linéaires, la résolution de ces modèles ayant permis l'obtention de gains substantiels.

Problème de production dans l'agro-alimentaire

Exemple (Culture de courgettes et navets)

Supposons que l'on dispose d'une grande surface cultivable sur laquelle il est possible de faire pousser des navets ou des courgettes. Le coût des semences est considéré comme négligeable.
On dispose de deux types d'engrais X et Y, ainsi que d'un anti-parasite AP.
Le besoin en engrais et en anti-parasite pour les courgettes et pour les navets est synthétisé dans le tableau suivant :

Produits	Engrais X	Engrais Y	AP
Courgettes	$2L.m^{-2}$	$1L.m^{-2}$	0
Navets	$1L.m^{-2}$	$2L.m^{-2}$	$1L.m^{-2}$

Table – Les besoins en engrais et AP.

Problème de production dans l'agro-alimentaire

Exemple (Culture de courgettes et navets)

On dispose comme ressource de

Engrais	X	Y	AP
Disponibilités	**8 litres**	**7 litres**	**3 litres**

On peut s'attendre à une productivité de

Produit	Courgettes	Navets
Productivité	$\mathbf{4}kg.m^{-2}$	$\mathbf{5}kg.m^{-2}$

Le gain pour les courgettes et pour les navets est $1DH.kg^{-1}$.

Question

Quel est le gain maximum qui peut être fait compte tenu des ressources disponibles ?

Problème de production dans l'agro-alimentaire

Modélisation

Variables de décision :

- x : surface de courgettes cultuvée
- y : surface de navets cultuvée

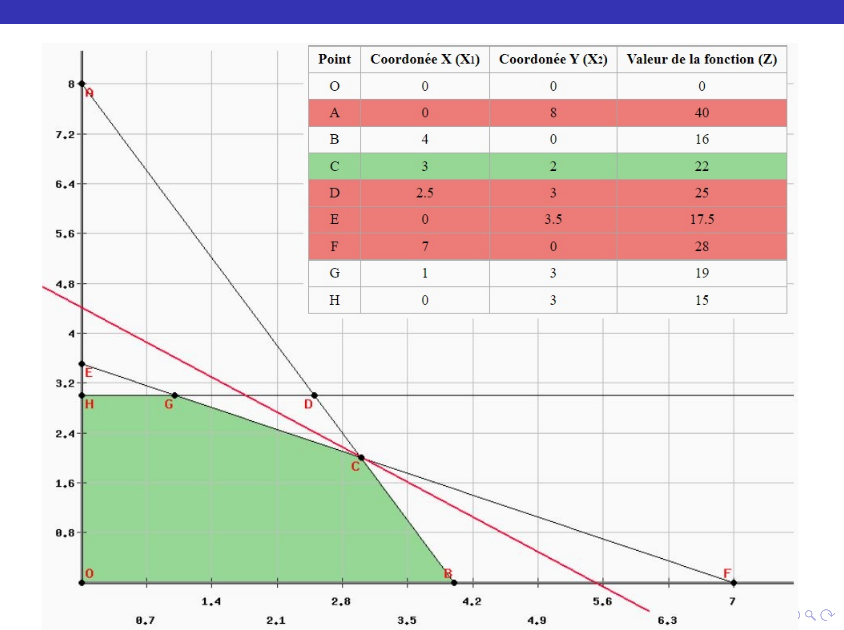
Fonction objectif :

$$\max z = 4x + 5y$$

Contraintes :

- $2x + y \leq 8$ (engrais X)
- $x + 2y \leq 7$ (engrais Y)
- $y \leq 3$ (anti-parasites)
- $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Problème de production dans l'agro-alimentaire



Point	Coordonée X (X_1)	Coordonée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	8	40
B	4	0	16
C	3	2	22
D	2.5	3	25
E	0	3.5	17.5
F	7	0	28
G	1	3	19
H	0	3	15

Summary

Programme linéaire - Définitions

Définition

Un programme linéaire est un problème dans lequel les variables sont des réels qui doivent satisfaire un ensemble d'équations et/ ou d'inéquations linéaires (dites contraintes) et la valeur d'une fonction linéaire de ces variables (appelée fonction objectif ou fonction économique) doit être rendue minimum ou maximum.

Ingrédients principaux :

- Alternatives (variables de décision, inconnues du problème).
- Restrictions (contraintes).
- Fonction à optimiser (minimiser ou maximiser).

Programme linéaire - Modélisation

Forme générale d'un programme linéaire :

$$
\begin{cases}
\text{Maximiser ou Minimiser } z(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Sous les contraintes } \begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \leq,=,\geq b_1 \\
\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \leq,=,\geq b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \leq,=,\geq b_m \\
x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Programme linéaire - Modélisation

- second membre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- n var. de décision $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- matrice de format $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- coût (ou profit) $c = (c_1, c_2 \dots c_n)$

Représentation matricielle

$$\max z = cx$$

$$\text{s.c.} \quad Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b$$

Programme linéaire - Forme Canonique

Forme canonique d'un PL :

Un programme linéaire est dit **canonique** s'il est écrit sous la forme suivante :

$$(PC)\begin{cases} [Max]\ \ z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques

Deux propriétés caractérisent la forme canonique.

- Toutes les variables sont astreintes à être positives ou nulles.
- Toutes les contraintes sont des inéquations.

Programme linéaire - Forme Standard

Forme standard d'un PL :

Un programme linéaire est dit **standard** s'il est écrit sous la forme suivante :

$$(PC)\begin{cases} [Max]\ \ z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques

Deux propriétés caractérisent la forme canonique.

- Toutes les variables sont astreintes à être positives ou nulles.
- Toutes les autres contraintes sont des équations.

Programme linéaire - Passage entre Formes

Théorème

- *Tout programme linéaire sous* **forme standard** *peut être écrit sous* **forme canonique**, *et*
- *tout programme linéaire sous* **forme canonique** *peut être écrit sous* **forme standard**.

Programme linéaire - Passage entre Formes

Passage entre les formes

- équation $\rightarrow$ inéquation

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- max $\leftrightarrow$ min $\qquad \max f(x) = -\min -f(x)$
- inéquation $\rightarrow$ équation : ajouter une variable d'écart

$$\begin{array}{lcll} ax \leq b & \iff & ax + s = b, & s \geq 0 \\ ax \geq b & \iff & ax - s = b, & s \geq 0 \end{array}$$

- variable non contrainte $\rightarrow$ variables positives

$$x \lesseqgtr 0 \iff \begin{cases} x = x^{+} - x^{-} \\ x^{+}, x^{-} \geq 0 \end{cases}$$

Programme linéaire - Solutions

Définition (**Solution admissible**)

Une solution **admissible** est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes.

Définition (**Solution optimale**)

Une **solution optimale** est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.

Algorithme pour construire le programme linéaire

1. Identifier les variables d'activités ou de décision ;
2. Identifier les contraintes du problème et les exprimer en fonction des variables d'activités ;
3. Identifier la fonction objectif ;
4. Ecrire le programme linéaire et spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Summary

PL - Exemple 1

Exemple (Problème de production)

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Chacun de ces produits demande pour son usinage, des heures de fabrications unitaires sur les machines A, B, C, D, E comme indiqué dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
P_1	0	1,5	2	3	3
P_2	3	4	3	2	0
Disponiblité de chaque machine	39h	60h	57h	70h	57h

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :

$M_1 = 1700$ UM $M_2 = 3200$ UM

Question

Ecrire le programme linéaire qui détermine le nombre de produits de type P_1 et le nombre de produits de type P_2 à fabriquer pour maximiser le chiffre d'affaires.

PL - Exemple 1

- Les variables : x_1 quantité à fabriquer de P_1 et x_2 quantité à fabriquer de P_2
- L'objectif :

$$\text{Maximiser } z = 1700x_1 + 3200x_2$$

- Les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} 3x_2 &\leq 39 \\ 1,5x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 57 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 70 \\ 3x_1 &\leq 57 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL - Exemple 1

Le PL correspondant

$$\begin{cases} [Max]\ z = 1700x_1 + 3200x_2 \\ 3x_2 \leq 39 \\ 1,5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 57 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 70 \\ 3x_1 \leq 57 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PL - Exemple 2

Exemple (Problème de transport)

Une entreprise de construction d'automobiles possède trois usines situées respectivement à Paris, Strasbourg et Lyon. Un certain métal nécessaire à la construction des véhicules est disponible aux ports de Havre et de Marseille. Les quantités de ce métal nécessaires aux usines sont 400, 300 et 200 tonnes respectivement pour les usines de Paris, Strasbourg et Lyon chaque semaine, tandis que les quantités disponibles sont 550 et 350 tonnes par semaines respectivement à Marseille et au Havre. Les coûts de transport unitaires sont comme suit :

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

PL - Exemple 2

Exemple (Suite)

Ce tableau signifie que pour convoyer x tonnes de Marseille à Strasbourg, par exemple, il en coûte $6x$ UM. Le problème consiste à déterminer un **plan de transport optimal**, c'est-à- dire à trouver quels sont les poids de métal à envoyer de chaque port à chaque usine de sorte que :

(i) Les demandes soient satisfaites (chaque usine reçoit au moins la quantité de métal qui lui est nécessaire).

(ii) Les quantités demandées à chaque port n'excèdent pas les quantités disponibles.

(iii) Les quantités envoyées sont positives ou nulles.

(iv) Le coût total du transport est rendu minimum compte tenu des contraintes ci-dessus.

PL - Exemple 2

Le PL correspondant

Affectant au port de Marseille l'indice 1, au port du Havre l'indice 2 et aux trois usines les indices 1,2 et 3 respectivement pour Paris, Strasbourg et Lyon, on conviendra que x_{ij} représentera le nombre de tonnes de métal qui sont acheminées chaque semaine depuis le port d'indice i vers l'usine d'indice j. Le programme linéaire s'écrit alors :

$$\begin{cases} [Min]z = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} \\ x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} \geq 300 \\ x_{13} + x_{23} \geq 200 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{cases}$$

Résolution d'un programme linéaire

Les méthodes suivantes sont les plus utilisées :

- Méthode graphique
- Méthode algébrique
- Méthode des simplexes
- Fonction Solveur

Summary

PL - Méthode Graphique

Description de la méthode

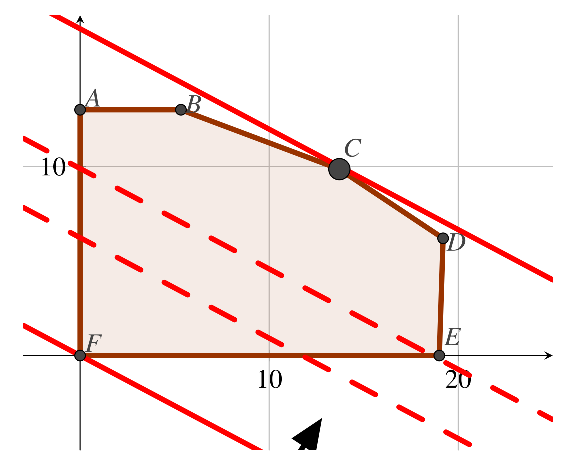
1. On trace les droites représentant les contraintes. Chaque inéquation est satisfaite dans un demi-plan limité par la droite d'équation correspondante.
2. Après avoir hachuré les parties du plan ne respectant pas les contraintes, il reste une zone non hachurée qui représente l'ensemble des solutions possibles (ensemble admissible).
3. Une solution optimale du programme linéaire est située en un sommet du domaine de l'ensemble des solutions possibles.

PL - Méthode Graphique

Résolution du PL du problème de production

$$\begin{cases} [Max]\ z = 1700x_1 + 3200x_2 \\ 3x_2 \leq 39 \\ 1,5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 57 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 70 \\ 3x_1 \leq 57 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PL - Méthode Graphique



L'optimum se trouve au point **C** $\left(x_1 = \frac{96}{7} \text{ et } x_2 = \frac{69}{7}\right)$. Donc

$$z_{max} = \frac{384000}{7}.$$

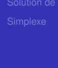
PL - Méthode Graphique

A B C D E F
10
10 20

L'optimum se trouve au point **C** $\left(x_1 = \frac{96}{7} \text{ et } x_2 = \frac{69}{7}\right)$. Donc

$$z_{max} = \frac{384000}{7}.$$





PL - Méthode Graphique

Point	Coordonée X (X1)	Coordonée Y (X2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	13	41600
B	5.3333333333333	13	50666.666666667
C	9	13	56900
D	14.666666666667	13	66533.333333333
E	19	13	73900
F	0	15	48000
G	40	0	68000
H	13.714285714286	9.8571428571429	54857.142857143
I	17.777777777778	8.3333333333333	56888.888888889
J	19	7.875	57500
K	0	19	60800
L	28.5	0	48450
M	19.2	6.2	52480
N	19	6.3333333333333	52566.666666667
P	0	35	112000
Q	23.333333333333	0	39666.666666667
R	19	6.5	53100
S	19	0	32300

PL - Méthode Graphique

Géométrie d'un PL

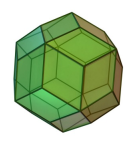
L'ensemble des solutions réalisables est toujours un **polyèdre** (intersection de demi-espaces)



Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des **hyperplans affines** ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

PL - Méthode Graphique

Géométrie d'un PL



Optimum atteint au bord

L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, est atteint en (au moins) un **sommet** du polyèdre.

Justification mathématique :
les dérivées partielles de $f(x) = c.x$ ne s'annulent jamais,
et le domaine $\{x \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ est compact
$\Rightarrow$ l'optimum est atteint au bord...